Notes du Cours d'Electrostatique

Prof. Patrizia Vignolo

Patrizia.Vignolo@inln.cnrs.fr

Jean-François Schaff

jean-francois.schaff@inln.cnrs.fr

Sommaire :

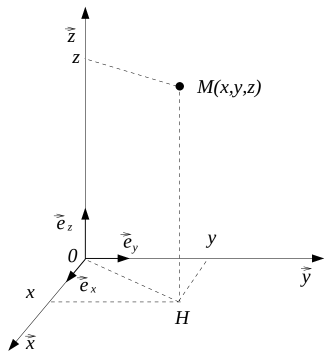
Cours N° 1 : Analyse Vectorielle

1 Représentation d'un point dans l'espace

On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$ de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Selon la symétrie du problème, on choisira :

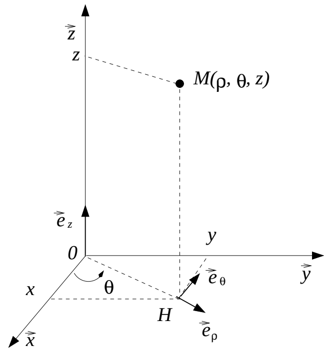
les coordonnées cartésiennes $(x{,}y{,}z)$:

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$



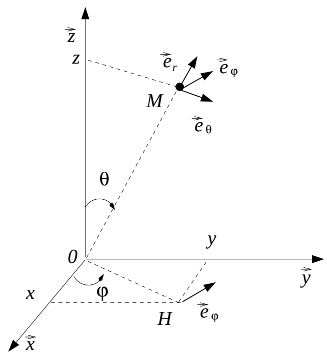
les coordonnées cylindriques $(\rho{,}\theta{,}z)$:

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\vec{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$



les coordonnées sphériques :$(r{,}\theta{,}\varphi)$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$



2 Vecteurs

Rappel. Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs avec composantes $\vec{v}_1 = (v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,z})$ et $\vec{v}_2 = (v_{2,x}, v_{2,y}, v_{2,z})$, s un scalaire. Alors :

- $\vec{v}_1 = v_{1,x}\vec{e}_x + v_{1,y}\vec{e}_y + v_{1,z}\vec{e}_z$, avec $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$ et $\vec{e}_z = (0,0,1)$;
- $s\vec{v}_1 = (sv_{1,x}, sv_{1,y}, sv_{1,z})$
- $\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1,x} + v_{2,x},\ v_{1,y} + v_{2,y},\ v_{1,z} + v_{2,z})$;
- $\vec{D} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_{1,x} - v_{2,x},\ v_{1,y} - v_{2,y},\ v_{1,z} - v_{2,z})$;
- $S = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |v_1||v_2| \cos\theta_{1,2} = v_{1,x}v_{2,x} + v_{1,y}v_{2,y} + v_{1,z}v_{2,z}$;
- $\vec{V} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1,y}v_{2,z} - v_{2,y}v_{1,z},\ v_{1,z}v_{2,x} - v_{2,z}v_{1,x},\ v_{1,x}v_{2,y} - v_{2,x}v_{1,y})$
  avec $|\vec{V}| = |v_1||v_2| \sin\theta_{1,2}$.

Remarque. Un vecteur qui est indépendant du sens de l'axe qui constitue son support est dit vecteur *polaire*. Un vecteur qui est déterminé par le sens de rotation autour de son axe-support est dit vecteur *axial* ou *pseudo-vecteur*.

3 Circulation d'un vecteur

Circulation élémentaire : $\mathrm{d}\mathcal{C} = \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$
- en coordonnées cartésiennes : $\mathrm{d}\mathcal{C} = v_x\mathrm{d}x + v_y\mathrm{d}y + v_z\mathrm{d}z$;
- en coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}\mathcal{C} = v_\rho\mathrm{d}\rho + v_\theta\rho\mathrm{d}\theta + v_z dz$;
- en coordonnées sphériques : $\mathrm{d}\mathcal{C} = v_r\mathrm{d}r + v_\theta r\mathrm{d}\theta + v_\phi r \sin\theta\mathrm{d}\phi$.

Circulation sur un chemin : $\mathcal{C} = \int_{AB} \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

Circulation sur un chemin fermé : $\mathcal{C} = \oint \vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

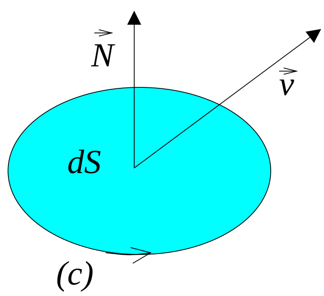
Remarque. Si le vecteur $\vec{v}$ représente une force, la circulation n'est autre que le travail.

4 Flux d'un vecteur

On défini le flux élémentaire $\mathrm{d}\Phi$ d'un vecteur v à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}S$:

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{v} \cdot \vec{N}\mathrm{d}S. \tag{1}$$

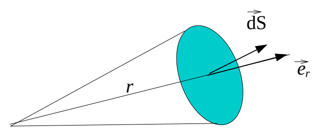
Si la surface est fermée, $\vec{N}$ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur. Si la surface est ouverte (comme en figure), une fois orienté le contour (c) de la surface, N est défini par la règle du tire-bouchon.



5 Angle solide

L'angle solide élémentaire $\mathrm{d}\Omega$, délimité par un cône coupant un élément de surface élémentaire $\mathrm{d}S$ situé à une distance r de son sommet O vaut

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}S} \cdot \vec{e}_r}{r^2}, \tag{2}$$



où $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est le vecteur de norme $\mathrm{d}S$, normal à la surface $\mathrm{d}S$.

6 Opérateurs vectoriels

<u>Gradient</u> : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

Le gradient est un vecteur qui pointe vers les valeurs croissantes de f. *Rappel* : $\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$.

<u>Divergence</u> : $\operatorname{div} \vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}$

Formule de Green-Ostrogradsky :

$$\boxed{\Phi = \iint_{S \text{ fermée}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\tau} \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}\tau} \tag{3}$$

<u>Rotationnel</u> : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$

Formule de Stokes :

$$\boxed{\mathcal{C} = \oint \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{S} (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}} \tag{4}$$

Le rotationnel mesure si un champ tourne localement.

<u>Laplacien</u> : $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

L'opérateur Laplacien peut s'appliquer à une fonction scalaire

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur

$$\triangle \vec{v} = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}.$$

7 Quelques relations vectorielles

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$

$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$\operatorname{div}(\overrightarrow{\nabla} f) = \triangle f$

$\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}) = 0$

$\text{rot}(\overrightarrow{\nabla}\text{f}) = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}) = \overrightarrow{\nabla}(\operatorname{div} \vec{v}) - \triangle \vec{v}$

7.1 Forme explicite des operateurs vectoriels

– Coordonnées cartesiennes

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\wedge\vec{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\
\triangle f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\triangle \vec{v} &= \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

– Coordonnées cylindriques

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\wedge\vec{v} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho v_\theta) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \\
\triangle f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\triangle \vec{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

– Coordonnées sphériques

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\wedge\vec{v} &= \left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)\right]\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\vec{e}_\theta \\
&+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\phi \\
\triangle f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \\
\triangle \vec{v} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \vec{v}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \phi^2}
\end{aligned}
$$

On remarque que $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)$.

Cours N° 2 : Champ et potentiel électrostatique

1 Charges électriques

L' électrostatique est l'étude des propriétés conférées à l'espace qui entoure une charge électrique.

La charge électrique dans le SI est mesurée en Coulomb (C).

Toute charge est multiple de la charge élémentaire e, qui vaut : $e = 1,6.10^{-19}C$.

Dans la suite on parlera de :
– charges ponctuelles (analogues aux points matériels en mécanique)
– distributions continues de charges, définies par la densité de charge, qui peut être :

- linéique, $\lambda = \mathrm{d}q/\mathrm{d}l$;
- surfacique, $\sigma = \mathrm{d}q/\mathrm{d}S$;
- volumique, $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}\tau$.

2 Loi de Coulomb

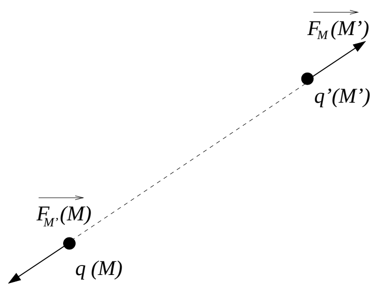
La force de Coulomb est la force exercée par une charge q au point M sur une charge q' au point M' :

$$\vec{F}_M(M') = Kqq'\vec{u}_{MM'}/r^2 \tag{5}$$

avec $K = 1/4\pi\epsilon_0 = 9.10^9$ N m^2 C^{-2}.

La force exercée par la charge q' au point M' sur la charge q au point M vérifie le principe d'action-réaction : $\vec{F}_{M'}(M) = -\vec{F}_M(M')$.

La force est répulsive si les charges sont de même signe (comme dans la figure), elle est attractive si les charges sont de signe contraire.



3 Champ et potentiel

3.1 Charge ponctuelle

La présence d'une charge q au point M permet de définir au point M' une propriété vectorielle, le champ électrostatique

$$\vec{E}_M(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\vec{u}_{MM'}/r^2,$$

et une propriété scalaire, le potentiel électrostatique

$$V_M(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q/r + \text{cte}.$$

Le champ et le potentiel éléctrostatiques sont liés par la rélation :

$$\vec{E}_M(M') = -\vec{\nabla} V_M(M').$$

3.2 Système de charges

En présence de plusieurs charges q_i, le champ éléctrostatique est la somme des champs éléctrostatiques produits par chaque charge q_i :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \vec{u}_{M_iM'}/r_i^2.$$

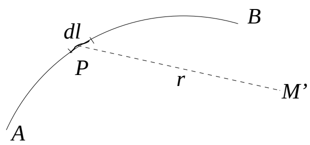
De même pour le potentiel électrostatique :

$$\vec{V}(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i/r_i.$$

En présence d'une distribution de charges linéaire λ, le champ et le potentiel s'écrivent :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{AB} \frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2} \vec{u}_{PM'}$$

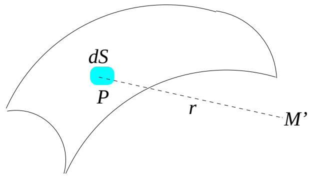
$$V(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{AB} \frac{\lambda \mathrm{d}l}{r}$$



En présence d'une distribution de charges de surface σ, le champ et le potentiel s'écrivent :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int \frac{\sigma \mathrm{d}S}{r^2} \vec{u}_{PM'}$$

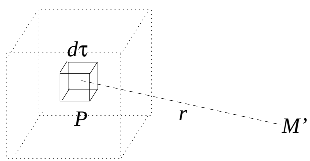
$$V(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int \frac{\sigma \mathrm{d}S}{r}$$



En présence d'une distribution de charges volumique ρ, le champ et le potentiel s'écrivent :

$$\vec{E}(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int \frac{\rho \mathrm{d}\tau}{r^2} \vec{u}_{PM'}$$

$$V(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int \frac{\rho \mathrm{d}\tau}{r}$$



4 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Les lignes de champ sont les courbes tangentes point par point au champ électrique.
Les surfaces équipotentielles $V = const.$ sont définies par une circulation élémentaire du champ nulle. En effet :

$$V = const. \Rightarrow \quad \mathrm{d}V = 0 \Rightarrow \quad \mathrm{grad}V \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \Rightarrow \quad \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

5 Force et énergie potentielle électrostatique

Une charge q dans un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à une force

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Cette force est une force conservative car elle peut être écrite comme le gradient d'une fonction scalaire :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p,$$

où E_p est l'énergie potentielle électrostatique qui est liée au potentiel électrostatique par la relation $E_p = qV$.

6 Loi locale et circulation du champ électrique

Du fait que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, on obtient pour le champ électrique une loi locale : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = 0}$, et une loi intégrale : $\boxed{\int_{AB} \vec{E}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = V_A - V_B}$

7 Dipôle électrostatique

On appelle dipôle éléctrostatique un système de deux charges $-q$ et $+q$ placées aux points A et B.
Le champ à grande distance a pour composantes :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3}, \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad E_\phi = 0,$$

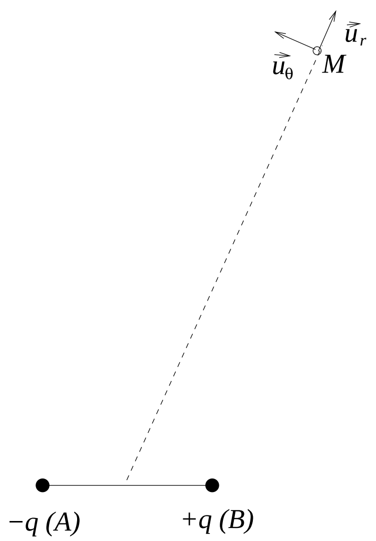
où p est la norme du vecteur *moment dipolaire* $\vec{p}$:

$$\vec{p} = q\overrightarrow{AB}.$$

Le potentiel créé par un dipôle électrostatique s'écrit :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2},$$

dans la limite où $r \gg |\vec{AB}|$.



7.1 Dipôle édectrostatique dans un champ externe $\vec{E}$.

Si le champ $\vec{E}$ est uniforme :
- la force exercée sur le dipôle est nulle

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0};$$

- le moment des forces oriente le dipôle selon le champ appliqué

$$\vec{M}(\vec{F}) = \vec{p} \wedge \vec{E};$$

- l'énergie potentielle

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

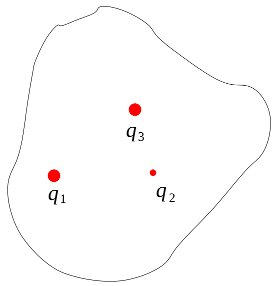
  est minimale lorsque $\theta = 0$: le dipôle est en équilibre stable quand il est orienté parallèlement au champ appliqué.

Cours N° 3 : Théorème de Gauss

1 Théorème de Gauss

Le flux d'un vecteur champ électrique à travers une surface fermée n'est dû qu'aux charges à l'intérieur de cette surface :

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}} \qquad (6)$$

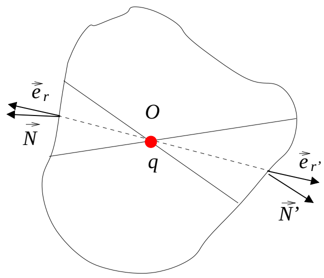


Demonstration : cas d'une charge ponctuelle.

Considérons une charge q englobée par une surface S. Soit dS et dS' deux éléments de surface découpés par les deux angles solide dΩ issus de O (voir la figure ci-dessous).

Le flux dΦ à travers dS vaut :

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathrm{d}\Omega.$$



Le flux dΦ' à travers dS' vaut :

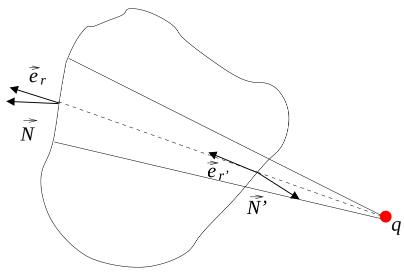
$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N'} \mathrm{d}S' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathrm{d}\Omega.$$

Au total

$$\Phi = \iint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Considerez maintenant une charge q qui n'est pas englobée par la surface (comme en figure ci-dessous). Dans ce cas le flux dΦ à travers dS vaut :

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathrm{d}\Omega.$$



Le flux dΦ' à travers dS' vaut :

$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \vec{e}_r \cdot \vec{N'} \mathrm{d}S' = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathrm{d}\Omega.$$

Donc on obtient dΦ + d$\Phi' = 0$, et au total $\Phi = 0$.

2 Loi intégrale et loi locale

Soit S une surface fermée contenant une densité volumique ρ, alors on a :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_\tau \frac{\rho}{\epsilon_0}\,\mathrm{d}\tau = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \tag{7}$$

Equation (7) constitue la forme intégrale du théorème de Gauss.

En exploitant le théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky) on obtient la forme locale du théorème de Gauss (2^{eme} loi de l'électrostatique)

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0}.$$

<u>Remarque</u> : En l'absence de charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

<u>**Rappel**</u> : Le champ électrostatique $\vec{E}$ obéit aux lois suivantes :

	locale	intégrale
1^{ere} loi	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$	$\int_{AB} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(A) - V(B)$
2^{eme} loi	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

3 Equation de Poisson et de Laplace (pour le potentiel)

De la forme locale du théorème de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ et de la rélation qui lie le champ au potentiel, $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, on obtient, en présence de charges, l'équation de Poisson :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \;\Rightarrow\; -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \rho/\epsilon_0 \;\Rightarrow\; \boxed{\triangle V + \rho/\epsilon_0 = 0}$$

et, sans charges, l'équation de Laplace :

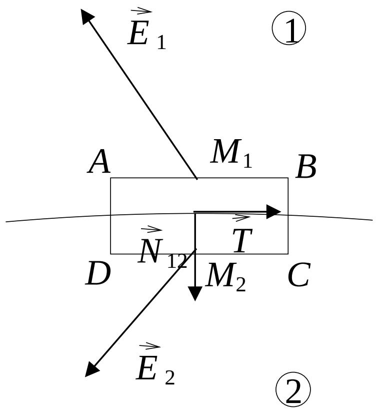
$$\boxed{\triangle V = 0}$$

4 Condition de passage à l'interface entre deux distributions de charges

Considerons le champ en deux points M_1 et M_2 infiniment proches d'une interface, avec une distribution de charge surfacique σ, séparant deux milieux avec deux distributions de charges ρ_1 et ρ_2.
Dans le repère de Frenet on peur écrire :

$$\vec{E}_1 = E_{1,t}\vec{T} + E_{1,n}\vec{N}_{12}$$

$$\vec{E}_2 = E_{2,t}\vec{T} + E_{2,n}\vec{N}_{12}$$



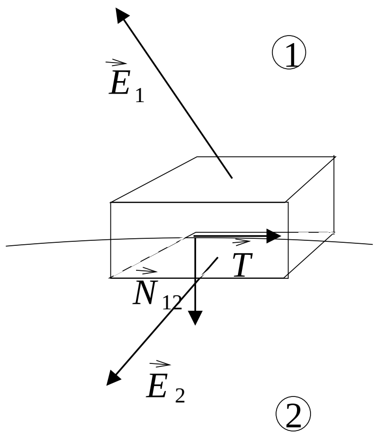
où $\vec{N}_{12}$ est le vecteur unitaire normal à la surface et orienté du point M_1 au point M_2.
De la première loi de l'électrostatique on obtient :

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \;\Rightarrow\; E_{1,t}AB - E_{2,t}CD = 0.$$

Donc le champ tangent à l'interface est conservé : $E_{1,t} = E_{2,t}$

De la deuxième loi de l'électrostatique (thèoreme de Gauss) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi =& \vec{E}_1 \cdot \vec{N}_1 \mathrm{d}S + E_2 \cdot \vec{N}_2 \mathrm{d}S \\ =& E_{2,n}\mathrm{d}S - E_{1,n}\mathrm{d}S = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$



Donc le champ normal $\vec{E}_n = E_n\vec{N}_{12}$ subit une discontinuité si l'interface est chargée :

$$\vec{E}_{2,n} - \vec{E}_{1,n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{N}_{12}.$$

Cours N° 4 : Conducteur en équilibre

1 Loi de conservation de la charge

Dans un système isolé, la charge électrique se conserve : $q(t)$ =Constante

2 Corps conducteurs et corps isolants

Corps conducteurs : Une partie des électrons peuvent se déplacer.
Corps isolants (ou diélectriques) : Les charges ne sont pas libres.

3 Equilibre électrostatique

Considerons un conducteur chargé. Le conducteur est à l'équilibre électrostatique si la force sur chaque charge est nulle. Ça implique que à l'intérieur du conducteur

$$\vec{E}_{int} = \vec{0},$$

c'est-à-dire $V_{int} = V_0 =$ Constante, $\rho_{int} = 0$.

3.1 Théorème de Coulomb

Si le conducteur est chargé on a également $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, et la charge ne peut se répartir que sur la surface ($\sigma \neq 0$). Les charges surfaciques sont à l'équilibre si la surface est une surface équipotentielle.
La surface d'un conducteur à l'équilibre étant une surface équipotentielle, au voisinage de la surface le champ est normal à la surface même et vaut

$$\vec{E}_{ext} = \sigma \vec{N}/\epsilon_0. \tag{8}$$

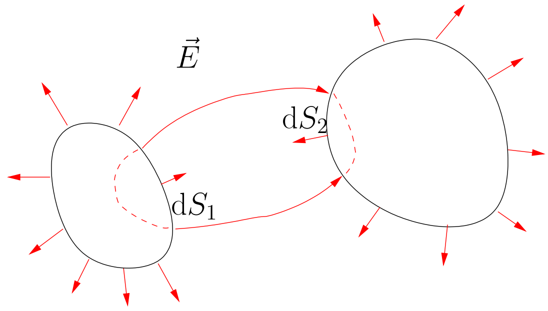
On appelle *cage de Faraday* une cavité à l'intérieur d'un conducteur (où $\vec{E} = \vec{0}$).

4 Influence de deux conducteurs chargés

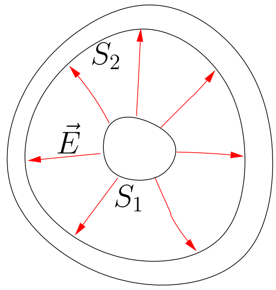
Soit deux conducteurs (C_1) et (C_2) dont au moins un chargé (C_1). La distribution de charge sur (C_2) devient inhomogène à cause du champ produit par la charge sur le conducteur (C_1).

4.1 Théorème de Faraday

L'équilibre est atteint quand les charges $Q_1 = \sigma_1 \mathrm{d}S_1$ et $Q_2 = \sigma_2 \mathrm{d}S_2$ se faisant face sont égales et opposées (théorème de Faraday).



Si l'ensemble des lignes de champs d'un des conducteurs rejoignent l'autre (figure à côté) l'influence est dite totale. Si seulement une partie des lignes de champs se rejoignent l'influence est dite partielle (figure en haut).



5 Capacité d'un conducteur

La charge d'un conducteur unique est proportionnelle au potentiel V. Le coefficient de proportionnalité entre la charge et le potentiel est la capacité :

$$C = \frac{q}{V}. \tag{9}$$

La capacité se mesure en *farad* (F) : un farad$=\dfrac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}=\dfrac{\text{Coulomb}^2}{\text{Joule}}$.

Pour une sphère de rayon de 1 m : $C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{1}{9}10^{-9}$ F.

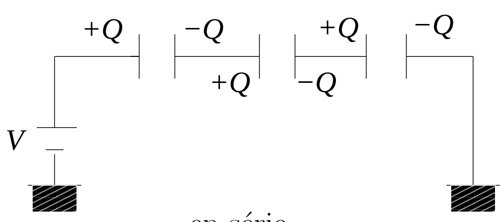
5.1 Capacité d'un condensateur

Si deux conducteurs (C_1) et (C_2) sont en influence totale, ils forment un condensateur de capacité

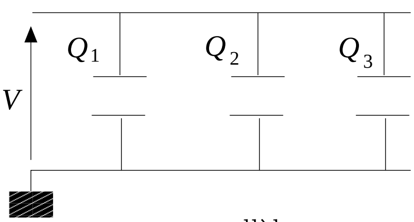
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}. \tag{10}$$

5.2 Associations de condensateurs

Condensateurs en série : $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \ldots$
Condensateurs en parallèle : $C = C_1 + C_2 + \ldots$



en série



en parallèle

Cours N° 5 : Energie électrostatique

1 Charge ponctuelle en interaction avec un champ extérieur

Rappel :

- Une charge ponctuelle isolée ne peut pas avoir une énergie potentielle (elle ne se "voit" pas).
- Dans le cas de deux chrages q et q' :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{qq'}{r}, \tag{11}$$

qui peut être considérée comme (i) l'énergie de q' dans le champ de q ou comme (ii) l'énergie de q dans le champ q'. Equation (11) peut être écrite

$$E_p = \frac{1}{2}\left(qV_{q'\to q} + q'V_{q\to q'}\right) \tag{12}$$

où $V_{q'\to q}$ est le potentiel créé par la charge q' au point q.

1.1 Energie potentielle d'une distribution de charges ponctuelles

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \tag{13}$$

où $V_i = V_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\cdots\to i}$ est le potenteil résultant crée par les charges $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots$ au point où demeure la charge q_i.

1.2 Energie potentielle d'une distribution continue de charges

$$E_p = \frac{1}{2}\int V\mathrm{d}q \tag{14}$$

où $\mathrm{d}q = \lambda\mathrm{d}l$ si la distribution est linéaire, $\mathrm{d}q = \sigma\mathrm{d}S$ si la distribution est superficielle, $\mathrm{d}q = \rho\mathrm{d}\tau$ si la distribution est volumique.

2 Energie électrostatique emmagasinée dans les conducteurs chargés

2.1 Cas d'un conducteur unique

Pour un conducteur portant une charge q et de capacité C :

$$E_p = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}. \tag{15}$$

2.2 Cas d'un condensateur

Pour un condensateur avec armatures aux potentiels V_1 et V_2, portant charges q_1 et q_2 $(q_2 = -q_1)$:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2) = \frac{1}{2}q_1(V_1 - V_2) \\ &= \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C}. \end{aligned} \tag{16}$$

Dans le cas d'un condensateur plan, de capacité $C = \epsilon_0 S/d$, le champ est uniforme et sa norme vaut $E = (V_1 - V_2)d$. On peut donc écrire $E_p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SdE^2$.
La densité d' énergie par unité de volume vaut

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

3 Forces électrostatiques à partir de l'énergie

3.1 Système à charge constante

Considerons le cas d'un condensateur préalamblement chargé et puis isolé. Le système étant isolé, la conservation de l' énergie implique que $\mathrm{d}\mathcal{L} + \mathrm{d}E_p = 0$. Donc de la relation $\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \vec{\nabla}E_p\cdot\mathrm{d}\vec{l}$, on trouve que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p. \tag{17}$$

3.2 Système à potentiel constant

Considerons un condensateur chargé relié à une source en permanance. Dans ce cas $\mathrm{d}\mathcal{L} + \mathrm{d}E_p = \mathrm{d}\mathcal{L}_s$, où $\mathcal{L}_s$ est l'énergie dépensée par la source pour maintenir le potentiel constant, avec

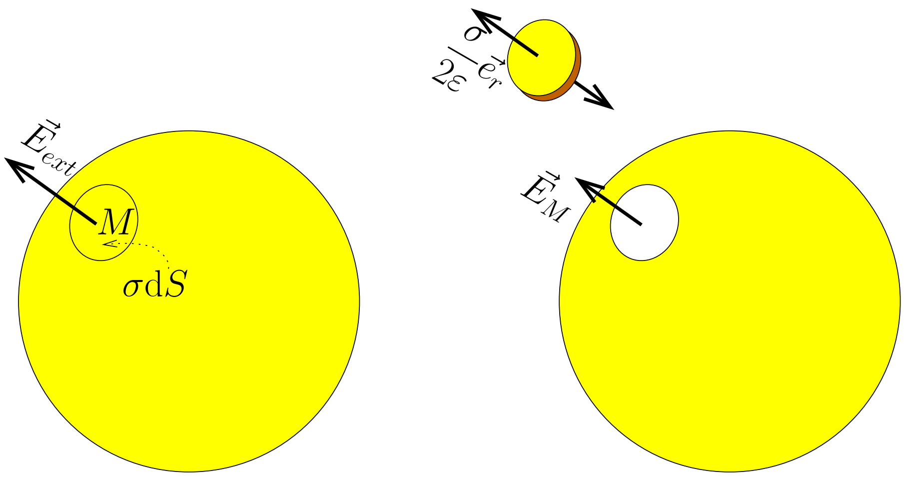
$$\mathcal{L}_s = (V_1 - V_2)\int_0^q \mathrm{d}q = (V_1 - V_2)q = 2E_p.$$

On trouve donc

$$\vec{F} = +\vec{\nabla}E_p. \tag{18}$$

4 Pression électrostatique

Exemple de la sphère.



Considérons une sphère conductrice avec une charge surfacique σ. D'après le théorème de Coulomb on sait que le champs à la surface vaut $\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_r$ et qu'il est nul à l'intérieur du conducteur.
Nous évaluons la force électrostatique $\mathrm{d}\vec{F}$ qui s'applique à la charge $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\vec{E}_M,$$

$\vec{E}_M$ étant le champ au point M créé par toutes les charges existantes sur le conducteur, à l'exception de la charque $\mathrm{d}q$. En exploitant le principe de superposition on déduit que

$$\vec{E}_M = \vec{E}_{ext} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r,$$

et donc que ce champ exerce sur la charge $\mathrm{d}q$ une force électrostatique

$$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}S\vec{e}_r.$$

Le terme $\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ est une force par unité de surface, c'est à dire une pression, *la pression électrostatique.*

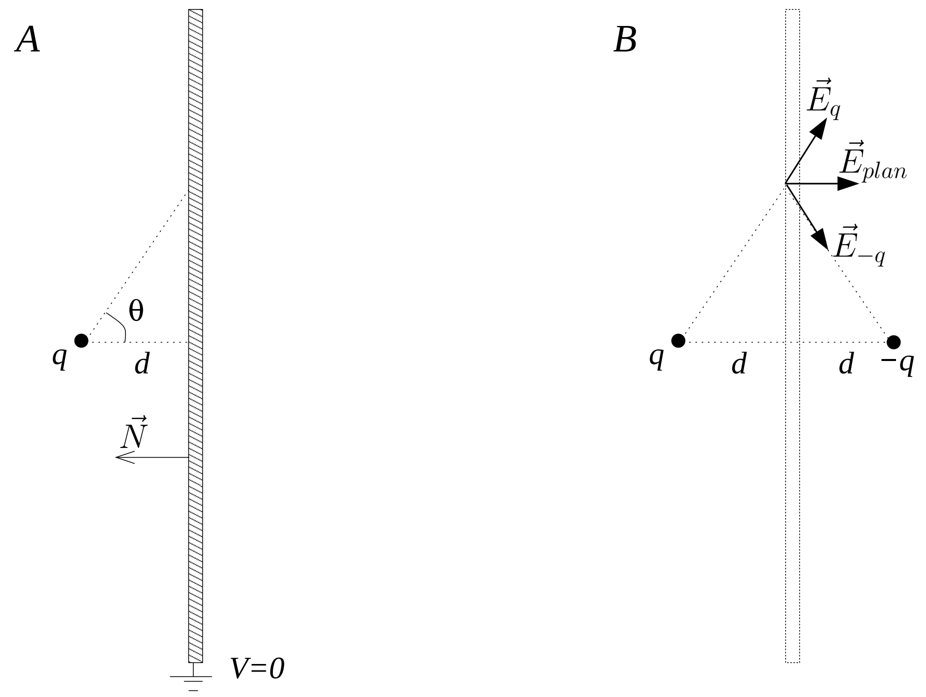
5 Annexe : Méthode des charges images

Le problème à résoudre :
Calculer le potentiel et le champ électrostatique pour un système donné (le système A).

La méthode :
Trouver un système B qui est décrit par la même équation de Poisson/Laplace pour le potentiel et qui a les mêmes conditions au bord que le système A.

Exemple. Une charge q, $q > 0$ est placée à une distance d d'un plan conducteur relié à la terre ($V_{plan} = 0$). Déterminer :
(a) le champ à proximité du plan conducteur ;
(b) la distribution surfacique σ sur le plan, en fonction de l'angle θ (voir schéma) ;
(c) la force exercée par le plan sur la charge.

Solution :



Le système B est un système sans le plan conducteur, avec une charge $-q$ située symétriquement par rapport au plan. La région à gauche du plan est décrite par la même équation pour le potentiel (la distribution des charges est la même) pour les sytème A et B, et la condition au bord $V_{plan} = 0$ est bien vérifiée dans le système B grâce à la charge *image* $-q$.

(a) $\vec{E}_{plan} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q} = \dfrac{-q\cos^3\theta}{2\pi\varepsilon_0 d^2}\vec{N}$

(b) $\vec{E}_{plan} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}$. Donc $\sigma = \dfrac{-q\cos^3\theta}{2\pi d^2}$

(c) $\vec{F}_{plan\to q} = \vec{F}_{-q\to q} = -\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\vec{N}$.