Notes du Cours de Mécanique

1^{er} semestre, année 2011/2012

Patrizia Vignolo
Jean-Michel Chauveau
Thibault Gayral

Sommaire :

Cours N^o 1 : Introduction

1 Grandeurs fondamentales et unités.

Le physicien admet quatre grandeurs fondamentales indépendantes :
- *longueur* [L] ;
- *masse* [M] ;
- *temps* [T] ;
- *charge* [C].

A quelques exceptions près toutes les autres grandeurs utilisées en physique peuvent être reliées à ces quatres grandeurs. Les unités de toutes ces grandeurs dérivées s'éxpriment à leur tour en fonction des unités des quatre grandeurs fondamentales.

1.1 Système d'unités MKSC

Le système d'unités MKSC, ou Système Internationale (SI) est le système qui utilise
- le *mètre* comme unité de mesure de la longueur ;
- le *kilogramme* comme unité de mesure de la masse ;
- la *seconde* comme unité de mesure du temps ;
- le *coulomb* comme unité de mesure de la charge.

Dans l'étude de la mécanique on utilise le mètre, le kilogramme et la seconde.
- Le mètre est défini à partir de la vitesse de la lumière et sa définition est la longueur du trajet que parcourt la lumière dans le vide pendant 1/299792458 secondes.
- Le kilogramme est défini comme la masse du kilogramme international, un bloc de platine conservé au Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres, près de Paris.
- La seconde est définie comme la durée de 9192631770 périodes de la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental du Césium 133.

2 Les vecteurs.

Beaucoup de quantités physiques sont complètement déterminées par leur grandeur, exprimée dans une unité convenable. Ces quantités sont appelées *scalaires*. Le volume, la masse, le temps, l'énergie sont des exemples de quantités scalaires.
D'autes quantités physiques nécessitent pour leur détermination, une direction en plus de leur grandeurs. Ces quantités sont appelées *vecteurs*. Le déplacement, la vitesse, l'accélération, la force sont des exemples de quantités vectorielles.
Les vecteurs sont représentés graphiquement par des segments de droite avec une flêche qui indique la direction et une longueur proportionnelle à la grandeur.
Un vecteur *unitaire* est un vecteur dont la grandeur est égale à 1. On l'indique souvent avec les symboles $\vec{e}$ ou $\vec{u}$.

2.1 Opérations vectorielles.

Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs avec composantes $\vec{v}_1 = (v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,z})$ et $\vec{v}_2 = (v_{2,x}, v_{2,y}, v_{2,z})$, sur la base orthonormée $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$; soit s un scalaire. Alors :

- $\vec{v}_1 = v_{1,x}\vec{e}_x + v_{1,y}\vec{e}_y + v_{1,z}\vec{e}_z$, avec $\vec{e}_x = (1,0,0)$, $\vec{e}_y = (0,1,0)$ et $\vec{e}_z = (0,0,1)$;

- $s\vec{v}_1 = (sv_{1,x}, sv_{1,y}, sv_{1,z})$;
  (produit d'un scalaire avec un vecteur)

- $\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1,x} + v_{2,x},\ v_{1,y} + v_{2,y},\ v_{1,z} + v_{2,z})$;
  (somme de deux vecteurs)

- $\vec{D} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_{1,x} - v_{2,x},\ v_{1,y} - v_{2,y},\ v_{1,z} - v_{2,z})$;
  (différence de deux vecteurs)

- $S = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |v_1||v_2| \cos\theta_{1,2} = v_{1,x}v_{2,x} + v_{1,y}v_{2,y} + v_{1,z}v_{2,z}$;
  (produit scalaire de deux vecteurs)

- $\vec{V} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (v_{1,y}v_{2,z} - v_{2,y}v_{1,z},\ v_{1,z}v_{2,x} - v_{2,z}v_{1,x},\ v_{1,x}v_{2,y} - v_{2,x}v_{1,y})$
  avec $|\vec{V}| = |v_1||v_2| \sin\theta_{1,2}$.
  (produit vectoriel de deux vecteurs)
  On peut écrire le produit vectoriel sous la forme de déterminant :

$$\vec{V} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_{1,x} & v_{1,y} & v_{1,z} \\ v_{2,x} & v_{2,y} & v_{2,z} \end{vmatrix}$$

  Remarque. Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$.

Cours N° 2 : Cinématique du point matériel

But : décrire les mouvements d'un point sans s'occuper des causes qui ont produit le mouvement.

Nécessite :
– de repérer les positions du point au cours du temps.
– Introduction de grandeurs spécifiques pour caractériser les évolutions du mouvement.

Point matériel : corps matériel qui peut être assimilé à un point s'il ne peut pas rouler sur lui-même et si ses dimensions sont faibles par rapport aux distances qu'il peut parcourir.

1 Référentiels et systèmes de coordonnées.

Il faut déterminer le mouvement d'un point par rapport à un solide indéformable que l'on doit préciser : c'est le *référentiel*.

1.1 Représentation d'un point dans l'espace

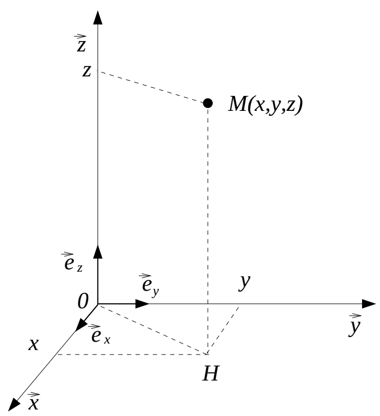
On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$ de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Ce repère est fixe dans le référentiel.

Selon la symétrie du problème, on choisira :

les coordonnées cartésiennes (x,y,z) :

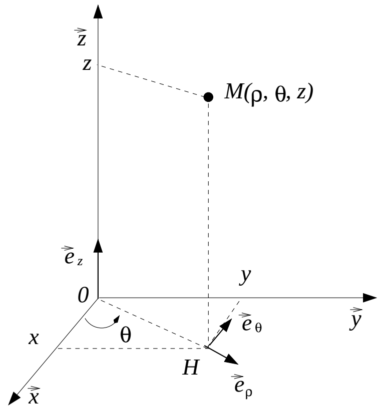
$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$



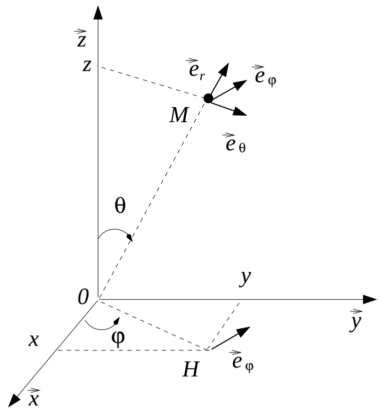
les coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) :

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\rho\vec{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$



les coordonnées sphériques :(r,θ,φ)

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$

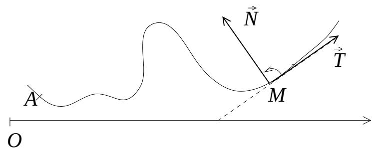


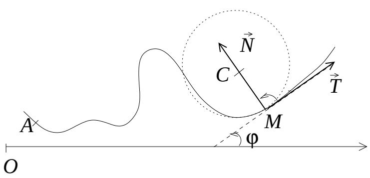
la base de Frénet :
(base adptée pour décrire les mouvements plans)

- On choisit une origine A et puis on oriente le parcours dans un sens détérminé
- à chaque point M on définit un vecteur tangent $\vec{T}$ et un vecteur $\vec{N}$, tels que $(\vec{T},\vec{N}) = +\frac{\pi}{2}$.

  Les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont unitaires.
- $s = AM$;

  $ds = R_c d\varphi$ où $R_c\vec{N} = \vec{MC}$. R_c est appelé le rayon de courbure de la trajectoire.





Remarque :
Les bases cylindrique, sphérique et de Frénet *NE SONT PAS LIEES AU REFERENTIEL !*

1.2 Vitesse et accélération

1.2.1 La vitesse

- vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 : $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$
- vitesse instantanée : $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$.

1.2.2 L'accélération

– accélération moyenne entre deux instants t_1 et t_2 : $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$

– accélération instantanée : $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$.

1.2.3 Expressions dans les differents systèmes de coordonnées

<u>En coordonnées cartésiennes</u> :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

<u>En coordonnées cylindriques</u> :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

<u>En coordonnées sphériques</u> :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} =$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\theta + (r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e}_\varphi$$

<u>Dans la base de Frénet</u> :

$\vec{v} = v\vec{T} = \dfrac{ds}{dt}\vec{T}$;

$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$ où $a_T = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ et $a_N = \dfrac{1}{R_c}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \dfrac{v^2}{R_c}$

Cours N° 3 : Dynamique du point matériel

But : Connaissant la position et la vitesse à l'instant $t = 0$ d'un système matériel, déterminer sa position et sa vitesse à tout instant t grâce aux lois de la dynamique.

1 Les forces

Toute action capable de provoquer le mouvement ou de modifier le vecteur vitesse d'un point matériel est représentée par une grandeur vectorielle qui définit le vecteur force exercée sur ce point matériel.

Les forces, étant des vecteurs, sont des grandeurs additives.

La grandeur physique d'une force est : $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$.

Dans le système d'unités SI , une force s'exprime en *Newton* : N=kg m s^{-2}.

1.1 Classification des forces

1. Forces de types "interactions à distance"
   - force gravitationnelle
   - force électromagnétique
2. Forces de types "interactions de contact"
   - force de rappel d'un ressort
   - tension d'un fil
   - force de frottement fluide
   - force de réaction d'un support, frottement de glissement

On discutera quelques forces usuelles en mécanique, après avoir énoncé les trois lois de la dynamique.

2 Les trois lois de la dynamique (de Newton)

1. **Première loi de Newton ou principe d'inertie**

   On postule l'existence de référentiels $\mathcal{R}$ dits *inertiels* ou *galiléens* dans lesquels une particule mécaniquement isolée, en mouvement dans $\mathcal{R}$, est en translation rectiligne uniforme. Si cette particule se trouve initialement au repos dans $\mathcal{R}$, elle se mantient dans l'état de repos.

2. **Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique**

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la relation entre l'accélération $\vec{a}$ du point matériel de masse m et la force $\vec{F}$ appliquée est fournie par l'équation

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Autrement dit, la *quantité de mouvement* $\vec{p} = m\vec{v}$ d'un corps dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ varie dans le temps par effet de la force $\vec{F}$ appliquée, selon la relation

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

3. **Troisième loi de Newton ou principe des interactions réciproques**
   Considérons deux points matériels M_1 et M_2 dont les forces d'interaction réciproque sont notées $\vec{F}_{1\to 2}$ (exercée par M_1 sur M_2) et $\vec{F}_{2\to 1}$ (exercée par M_2 sur M_1).
   La troisième loi de Newton stipule que les forces $\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{2\to 1}$ sont portées par la droite passant par M_1 et M_2 et sont opposées ($\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$).

3 Forces usuelles en mécanique

3.1 Force gravitationnelle

Il existe une force gravitationnelle d'attraction entre deux masses ponctuelle m_1 et m_2, distantes de $r_{1,2}$,

$$\vec{F}_{1\to 2} = -Gm_1m_2\frac{\vec{u}}{r_{1,2}^2}$$

où $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$, et $G = 6,672 \cdot 10^{-11}\text{N}\cdot\ \text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. ($G$, constante de gravitation).

3.1.1 Le poids d'un corps et l'accélération de la pesanteur.

Le poids $\vec{P}$ d'une particule de masse m est lié à l'accélération de pesanteur $\vec{g}$ par :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Cette force s'identifie à la force gravitationnelle exercée par la terre sur la particule de masse m, c'est-à dire :

$$\vec{P} = -GM_Tm\frac{\vec{u}_z}{(R_T+z)^2}.$$

Au voisinage du sol ($z \ll R_T$, $R_T \simeq 6400$ km), l'accélération de la pesanteur vaut $g = G\dfrac{M_T}{R_T^2} \simeq 9.8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

3.2 Contact entre deux solides : force de frottement

Supposons que le point matériel M est posé sur une surface $(\mathcal{S})$. Il existe, en général, une réaction $\vec{R}$, exercée par $\mathcal{S}$ sur M. Soient $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ les composantes tangentielle et normale de la réaction $\vec{R}$. Les normes R_T et R_N de ces composantes vérifient les relations suivantes :

- *en absence de glissement*

$$R_T \leq \mu_s R_N,$$

μ_s désignant le coefficient statique de frottement.
- *en présence de glissement de M sur $\mathcal{S}$*

$$R_T = \mu_d R_N,$$

μ_d désignant le coefficient dynamique de frottement. La valeur de μ_d est toujours inférieur à celle de μ_s.

3.3 Force de rappel d'un ressort

Soit un ressort de masse négligeable, de longueur au repos ℓ_0. Une petite variation algébrique $\ell - \ell_0$ de la longueur produit une force de rappel élastique d'expression :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire orienté suivant le sens de l'allongement du ressort.

4 Théorème du moment cinétique

Moment d'une force.
Le moment d'une force en un point O quelconque,

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{F},$$

définit l'efficacité d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M pour effectuer un mouvement de rotation autour d' un axe passant par le point O et orthogonal au plan $(\vec{OM}, \vec{F})$. Il s'agit d'un vecteur orthogonal au plan $(\vec{OM}, \vec{F})$.

Moment cinétique.
Le moment cinétique en un point O quelconque,

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{p},$$

définit la quantité de mouvement par rapport à un axe passant par le point O et orthogonal au plan $(\vec{OM}, \vec{p})$. Il s'agit d'un vecteur orthogonal au plan $(\vec{OM}, \vec{p})$.

Enoncé du théorème.
Soit O un point fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. Alors la dérivée du moment cinétique en O est égale au moment des forces (extérieures) au point O :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_0.$$

Quelques conséquences...

4.1 Equilibres des corps rigides

Un point matériel dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est à l'équilibre si les conditions

$$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = \vec{0} \end{cases}$$

sont vérifiées.
Un corps rigide, à la différence d'un point matériel peut rouler sur lui même (même si $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$). Donc, un corps rigide dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ est à l'équilibre si les conditions

$$\begin{cases} \vec{F}_{tot} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{0} \\ \vec{v}(t=0) = \vec{0} \end{cases}$$

sont vérifiées.

4.2 Forces centrales : conservation du moment cinétique

Si la force $\vec{F}$ et le vecteur position $O\vec{M}$ sont parallèles (ou antiparallèles), le moment de la force est nul, et donc le moment cinétique est une constante du mouvement :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{0} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = cst.$$

C'est le cas, par exemple, du mouvement des planètes :

$$\vec{L}_0 = mr\vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Le fait que $\vec{L}_0$ soit constant signifie que
- le plan de l'orbite ne varie jamais (il doit être perpendiculaire à $\vec{e}_z$)
- au périhélie (aphélie), la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est maximale (minimale).

4.3 Rotation d'un corps rigide par rapport à un axe

Un corps rigide de masse m peut être considéré comme composé par une infinité de points matériels de masse $\mathrm{d}m_i$ tels que $\sum_i \mathrm{d}m_i = m$. Si un corps rigide est en rotation autour d'un axe, son moment cinétique sera la somme des moments cinétiques des points matériels $\mathrm{d}m_i$:

$$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{r}_i \wedge (\mathrm{d}m_i r_i)\dot{\theta}\vec{e}_{\theta_i} = \sum_i r_i^2 \mathrm{d}m_i\, \dot{\theta}\vec{e}_z$$

où on a utilisé les coordonnées cylindriques et où on a identifié $\vec{e}_z$ avec l'axe de rotation. On définie

$$I = \sum_i r_i^2 \mathrm{d}m_i$$

le *moment d'inertie* du corps par rapport à l'axe de rotation considéré. Le moment d'inertie quantifie la résistance d'un corps soumis à une mise en rotation (ou plus généralement à une accélération angulaire), et a pour grandeur physique $[M \cdot L^2]$. Le moment cinétique peut être donc écrit sous la forme :

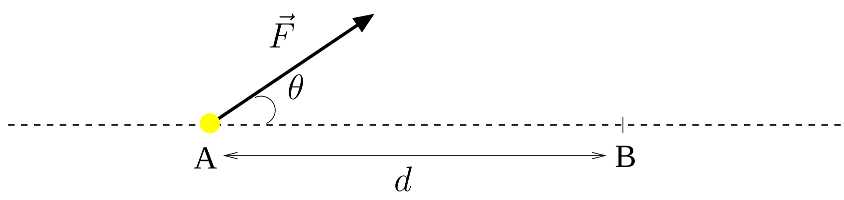
$$\vec{L}_0 = I\dot{\theta}\vec{e}_z.$$

Cours N° 4 : Travail et énergie

1 Travail et puissance

1.1 Cas simple

Soit $\vec{F}$ une force constante appliquée à un point se déplaçant de A à B.



Le travail W de la force est défini

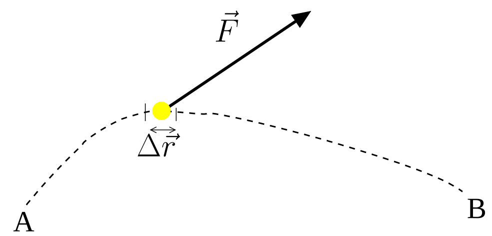
$$W = \vec{F} \cdot \vec{AB}.$$

Le travail W est une grandeur algébrique qui dépend du déplacement.
Equation aux dimensions : $[W] = [F][L] = [M][L]^2[T]^{-2}$. Donc l'unité est le kg·m^2·s^{-2} ou Joule (J).

1.2 Cas général

On défini le travail élémentaire δW d'une force $\vec{F}$ sur un interval infinitésimal $\Delta\vec{r}$ le long de la trajectoire d'un point matériel :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$



Le travail total le long de la trajectoire vaut donc

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

1.3 Puissance d'une force

La puissance d'une force est définie par le taux de variation de W dans l'unité de temps :

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \delta\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

L'unité est le J·s^{-1}.

2 Forces conservatives et énergie potentielle

2.1 Forces conservatives

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si le travail $W^i_{A\to B}(\vec{F})$ ne dépend pas de la trajectoire i pour aller de A à B. Conséquence :

$$W_{A\to B\to A}(\vec{F}) = W^i_{A\to B}(\vec{F}) + W^j_{B\to A}(\vec{F}) = W^i_{A\to B}(\vec{F}) - W^j_{A\to B}(\vec{F}) = W^i_{A\to B}(\vec{F}) - W^i_{A\to B}(\vec{F}) = 0.$$

Autrement dit :

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

2.2 Energie potentielle

Pour une force conservative, le travail ne dépend que des positions initiales et finales du mobile. On défini une fonction E_p de la position telle que

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -[E_p(B) - E_p(A)].$$

On dit que la force $\vec{F}$ dérive du potentiel E_p :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p.$$

3 Théorème de l'énergie cinétique et énergie mécanique

3.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m et vitesse $\vec{v}$ est définie par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

3.2 Enoncé du théorème de l' énergie cinétique

Soit un point M de masse m soumis à une force $\vec{F}$. La variation d'énergie cinétique lors du déplacement d'un point entre deux positions est égale au travail de la résultante des forces :

$$\begin{aligned} W_{A\to B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\vec{v}\mathrm{d}t \\ &= \int_A^B \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = E_c(B) - E_c(A). \end{aligned}$$

3.3 Energie mécanique

L'énergie mécanique est définie par

$$E_m = E_p + E_c.$$

3.4 Conservation de l'énergie mécanique

Soit un point M dans un référentiel galiléen, soumis à une force conservative $\vec{F}$, qui dérive d'un potentiel E_p tel que $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$. D'après le théorème de l'énergie cinétique, $W_{A\to B} = E_c(B) - E_c(A)$. Or $W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B)$, donc

$$E_p(A) + E_c(A) = E_p(B) + E_c(B) \;\Rightarrow E_m(A) = E_m(B).$$

3.5 Forces non conservatives

Soit un point M dans un référentiel galiléen, soumis à une force $\vec{F}_{tot} = \vec{F} + \vec{F}'$, telle que $\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ ($\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$) et $\oint \vec{F}' \cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0$ ($\vec{F}'$ n'est pas une force conservative). Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit alors :

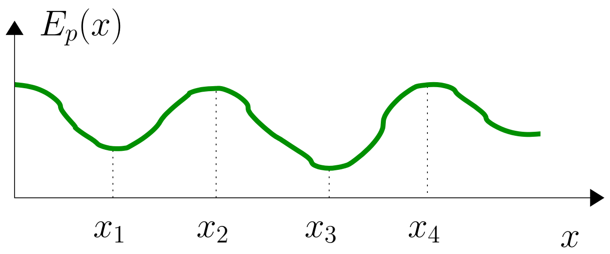
$$W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{A\to B}(\vec{F}') = E_c(B) - E_c(A) = [E_p(A) - E_p(B)] + W_{A\to B}(\vec{F}').$$

Donc

$$W_{A\to B}(\vec{F}') = \Delta E_m.$$

4 Equilibre d'un point matériel

Soit un point M dans un référentiel galiléen, soumis à une force conservative unidirectionel $\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{e}_x$.



Les positions d'équilibres x_j correspondent aux points stationnaires de la courbe $E_p(x)$: $F(x_j) = -\left[\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_j} = 0$. Au voisinage d'un minimum, la force agit comme une force de rappel :

$$\vec{F}(x_1 - \Delta x) = -\left[\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_1-\Delta x}(x_1 - \Delta x)\vec{e}_x.$$

L'équilibre est donc stable.
Au voisinage d'un maximum, la force tend à éloigner la particule : l'équilibre est donc instable.

Cours N° 5 : Dynamique d'un système de deux particules : Les chocs

1 Le centre de gravité

Considérons un système formé de particules de masse m_1 et m_2 et de vitesse $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ par rapport à un référentiel inertiel. La quantité de mouvement totale du système est

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

et la masse totale est

$$M = m_1 + m_2.$$

Nous allons considérer le système équivalent à une seule particule ayant la même masse que la masse totale et la quantité de mouvement totale. On appelle la vitesse de cette particule équivalente

$$\vec{v}_{CG} = \frac{\vec{P}}{M} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

la vitesse du système ou *vitesse du centre de gravité*. La position du centre de gravité est définie par

$$\vec{r}_{CG} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Si le système est isolé il y a conservation de la quantité de mouvement totale $\vec{P}$, donc le centre de gravité d'un système isolé se déplace avec une vitesse constante dans tout référentiel galiléen.

1.1 Principe fondamental de la dynamique du centre gravité

Si on applique sur le système une force externe $\vec{F}^{ext}$, le centre de gravité se déplace comme si celui-ci était une particule de masse égale à la masse totale du système et soumise à la force extérieure appliquée au système

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{2\to1} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1\to2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CG}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{tot}^{ext}.$$

2 La masse réduite

But : Etudier le mouvement relatif.
Dans un système isolé et dans un référentiel galiléen

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}_{2\to1}}{m_1} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}_{1\to2}}{m_2}.$$

La vitesse relative $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ varie dans le temps selon la loi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F}_{2\to1}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{1,2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\vec{F}_{2\to1}}{\mu} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{p}_r}{\mathrm{d}t} &= \vec{F}_{2\to1}.
\end{aligned}$$

où $\vec{p}_r = \mu\vec{v}_{1,2}$, $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ et $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est la *masse réduite* du système.
Le mouvement relatif de deux particules soumises uniquement à leur interaction mutuelle est équivalent, par rapport à un observateur d'inertie, au mouvement d'une particule de masse égale à μ sous l'action de cette interaction.

3 Le référentiel du centre de gravité

On définit comme *système de référence du centre de gravité* $\mathcal{C}$ un référentiel $x'y'z'$, avec origine O', dans lequel le centre de gravité est au repos. Le référentiel du centre de gravité se déplace avec une vitesse $\vec{v}_{CG}$ par rapport au référentiel xyz, avec origine O, du *laboratoire* $\mathcal{L}$.

3.1 Vitesse de deux particules dans le référentiel du centre de gravité

Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ la vitesse de deux particules de masse m_1 et m_2 dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$. Les vitesses $\vec{v}_1'$ et $\vec{v}_2'$ de ces particules dans le référentiel du centre de gravité $\mathcal{C}$ sont données par les relations

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1' &= \vec{v}_1 - \vec{v}_{CG} = \frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{m_1}\vec{v}_{1,2} \\
\vec{v}_2' &= \vec{v}_2 - \vec{v}_{CG} = -\frac{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = -\frac{\mu}{m_2}\vec{v}_{1,2}.
\end{aligned}$$

Donc, dans le référentiel du centre de gravité $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$, avec $p_1' = m_1 v_1' = \mu v_{1,2} = p_r$.

3.2 Energie cinétique dans le référentiel du centre de gravité

Dans $\mathcal{C}$, l'énergie cinétique de deux particules est égale à l'énergie cinétique relative :

$$\frac{1}{2}m_1(v_1')^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2')^2 = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{m_2} = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{\mu}.$$

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$, on peut montrer que

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{P^2}{M} + \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{\mu}$$

c'est-à-dire que l'énergie cinétique de deux particules peut être écrite comme la somme de l'énergie cinétique du centre de masse, $P^2/(2M)$, et l'énergie cinétique relative, $p_r^2/(2\mu)$.

3.3 Le moment cinétique dans le référentiel du centre de gravité

Dans le référentiel du centre de gravité $\mathcal{C}$, le moment cinétique de deux particules est égal au moment cinétique relatif :

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_1{}' \wedge \vec{p}_1{}' + \vec{r}_2{}' \wedge \vec{p}_2{}' = \vec{r}_{1,2} \wedge \vec{p}_r.$$

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$, on peut montrer que

$$\vec{L}_O = \vec{r}_1 \wedge \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{p}_2 = \vec{r}_{CG} \wedge \vec{P} + \vec{L}_{O'},$$

c'est-à-dire que le moment cinétique de deux particules peut être écrit comme la somme du moment cinétique du centre de masse, $\vec{r}_{CG} \wedge \vec{P}$, et du moment cinétique relatif (par rapport au centre de gravité), $\vec{r}_{1,2} \wedge \vec{p}_r$.

4 Les chocs

Deux particules de masse m_1 et m_2 ont des quantités de mouvement $\vec{p}_{i,1}$ et $\vec{p}_{i,2}$. L'interaction mutuelle modifie la quantité de mouvement (module et direction) des deux particules.

Puisque seules les forces intérieures jouent un rôle dans le choc, la quantité de mouvement totale $\vec{P}$ est une constante :

$$\boxed{\vec{P}_f = \vec{P}_i}.$$

But : déduire l'état final de deux particules, $\vec{p}_{f,1}$ et $\vec{p}_{f,2}$, en connaissant l'état initial $\vec{p}_{i,1}$ et $\vec{p}_{i,2}$ et la force d'interaction mutuelle.

4.1 Chocs élastiques

Un choc est dit élastique s'il y a conservation de l'énergie cinétique (l'énergie cinétique finale est égale à celle initiale) :

$$\frac{1}{2}\frac{p_{f,1}^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_{f,2}^2}{m_2} = \frac{1}{2}\frac{p_{i,1}^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_{i,2}^2}{m_2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\frac{P_f^2}{M} + \frac{1}{2}\frac{p_{f,r}^2}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{P_i^2}{M} + \frac{1}{2}\frac{p_{i,r}^2}{\mu}.$$

Vu que $\vec{P}_f = \vec{P}_i$, dans un choc élastique l'énergie cinétique relative finale est égale à l'énergie cinétique relative initiale,

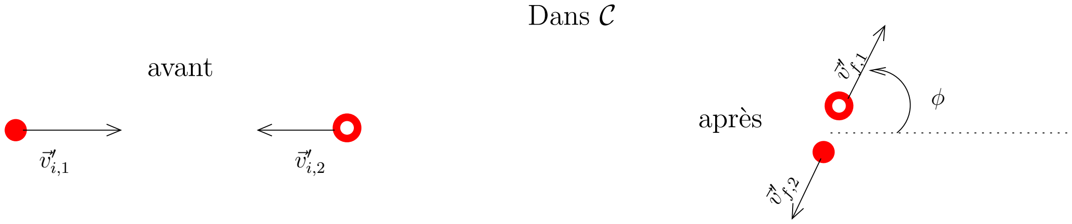
$$\frac{1}{2}\frac{p_{f,r}^2}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{p_{i,r}^2}{\mu}.$$

La conséquence est que dans le référentiel du centre de gravité $\mathcal{C}$, $p'_{i,1} = p'_{f,1}$ et $p'_{i,2} = p'_{f,2}$, c'est-à-dire $v'_{i,1} = v'_{f,1}$ et $v'_{i,2} = v'_{f,2}$. Donc, dans un choc élastique, dans $\mathcal{C}$, chaque particule se déplace avec une vitesse qui a la même norme avant et après le choc. Ce qui varie est l' angle ϕ que forme avec sa vitesse initiale la nouvelle direction de déplacement de la particule après le choc. Pour $\phi = 0$, les particules se sont "manquées" et ne changent pas de direction. Pour $\phi = \pi$ il y a *le choc de plein fouet*, et dans le référentiel $\mathcal{C}$ la masse m_1 repart en sens inverse. Dans cette configuration il y a un maximum d'énergie perdue par la masse m_1.
On peut démontrer que dans le choc d'une particule de masse m_1, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_1$ dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{L}$, avec une particule immobile de masse m_2 dans le même référentiel, l'angle θ (dans $\mathcal{L}$) que forme avec sa vitesse initiale la nouvelle direction de déplacement de la particule après le choc est lié à l'angle ϕ (dans $\mathcal{C}$) par la relation :

$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\cos\phi + m_1/m_2}.$$

Dans $\mathcal{L}$

Dans $\mathcal{C}$



4.2 Chocs inélastiques

Un choc est dit inélastique si l'énergie cinétique finale diffère de l'énergie cinétique initiale :

$$\frac{1}{2}\frac{p_{f,1}^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_{f,2}^2}{m_2} = \frac{1}{2}\frac{p_{i,1}^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{p_{i,2}^2}{m_2} + Q.$$

Si on rapporte le choc au référentiel du centre de gravité, on obtient la condition

$$\frac{1}{2}\frac{p_{f,r}^2}{\mu} = \frac{1}{2}\frac{p_{i,r}^2}{\mu} + Q.$$

Si $Q < 0$, l'énergie cinétique diminue (choc inélastique *endoénergétique*).
Si $Q > 0$, l'énergie cinétique s'accroît (choc inélastique *exoénergétique*).