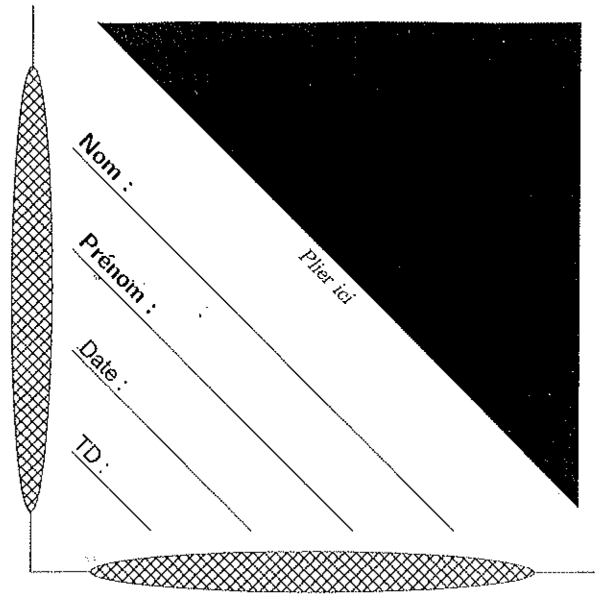
Université de Nice – Sophia Antipolis

Polytech'Nice – CiP1
Contrôle de Mécanique

07 Janvier 2010 – Durée : 1h30

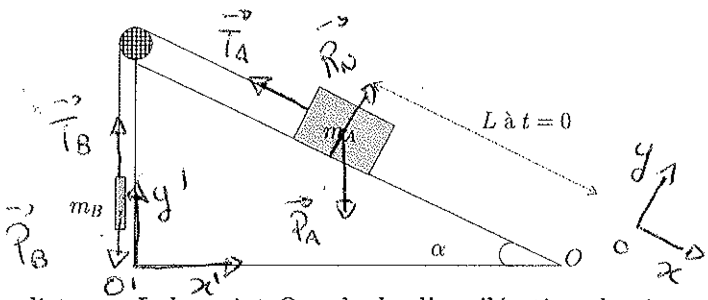
Note : CORRECTION



Cette feuille doit être cachetée par vos soins. Afin de faciliter le décachetage, n'opérez de fixation qu'à l'intérieur des ellipses hachurées

Documents non autorisés.

1. Dans l'expérience représentée ci-contre la poulie, dont la masse est négligeable, tourne sans frottement autour de son axe. A chacune des extrémités du fil inextensible est attachée une masse, respectivement m_A et m_B. Le mobile de masse m_A glisse sans rouler et sans frottement le long d'un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.



1.a Sachant qu'en $t = 0$ la masse m_A est immobile à une distance L du point O, calculer l'accélération, la vitesse et la distance parcourue après un temps t.

masse m_A $\quad \vec{P}_A + \vec{R}_N + \vec{T}_A = m_A \vec{a}_A$

le long de y $\quad -m_A g \cos\alpha + R_N = 0 \Rightarrow R_N = m_A g \cos\alpha$ (1)

le long de x $\quad m_A g \sin\alpha - T_A = m_A a_{A,x}$ (2)

masse m_B $\quad \vec{P}_B + \vec{T}_B = m_B \vec{a}_B$

le long de y' $\quad -m_B g + T_B = m_B a_{B,y'}$ (3)

fil inextensible $\Rightarrow a_{A,x} = a_{B,y'} = a$

et $T_A = T_B$

$\Rightarrow$ (1) + (2) $\Rightarrow (m_A \sin\alpha - m_B) g = (m_A + m_B) a$

$$\Rightarrow a = g \frac{(m_A \sin\alpha - m_B)}{m_A + m_B}$$

$\vec{a}_A = a\,\hat{e}_x$

$\vec{v}_A = at\,\hat{e}_x$ $\quad$ et $\quad \vec{OA} = \left(-L + \frac{1}{2} a t^2\right) \hat{e}_x$

1.b Calculer le temps τ mis par le point matériel m_A pour atteindre O et la vitesse en O.

$$\vec{OA}(\tau) = \vec{OO} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -L + \frac{1}{2}a \quad = 0 \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2L}{a}}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2L(m_A + m_B)}{g(m_A \sin\alpha - m_B)}}$$

1.c Supposons maintenant que le plan incliné a un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement dynamique μ_d. Pour quelle valeur de m_B, la masse m_A va-t-elle glisser (i) vers le bas, (ii) vers le haut ? On prendra : $g = 10$ m s^{-2}, $m_A = 2$ Kg, $\mu_S = \sqrt{3}/3$, $\alpha = \pi/6$ rad.

(i) m_A NE VA PAS GLISSER vers le bas si : $m_A g \sin\alpha - T_A - R_T = 0$
et $R_T \leq \mu_s R_N$

$\Rightarrow R_T = m_A g \sin\alpha - T_A = m_A g \sin\alpha - m_B g$ (car $T_A = T_B = m_B g$ à l'équilibre)

$R_T = \|\vec{R_T}\|$ et donc $m_A \sin\alpha \geq m_B$

$R_T \leq \mu_s R_N \Rightarrow m_A g \sin\alpha - m_B g \leq \mu_s m_A g \cos\alpha$

$\Rightarrow m_B \geq m_A(-\cos\alpha \cdot \mu_s + \sin\alpha) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) = 0$

Donc m_A ne va jamais glisser vers le bas.

(ii) m_A NE va pas glisser vers le haut si : $m_A g \sin\alpha - T_A + R_T = 0$
et $R_T \leq \mu_s R_N$

$R_T = T_A - m_A g \sin\alpha = (m_B - m_A \sin\alpha) g$
avec $m_B \geq m_A \sin\alpha$

$R_T \leq \mu_s R_N \Rightarrow (m_B - m_A \sin\alpha) g \leq \mu_s m_A \cos\alpha\, g$

$\Rightarrow m_B \leq m_A(\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha) = 2$ kg

$\Rightarrow m_A$ VA glisser vers le haut si $m_B > 2$ kg

2. Une mouche avance avec une accélération constante a_0 le long de la grande aiguille d'une horloge, laquelle tourne avec une vitesse angulaire constante ω.

2.a Exprimer les lois horaires du mouvement, en coordonnées polaires, $\rho(t)$ et $\theta(t)$ dans le référentiel lié à l'horloge, en sachant que $\rho(t = 0) = 0$, $\dot{\rho}(t = 0) = 0$ et $\theta(t = 0) = 0$.

$$\ddot{\rho} = a_0 \Rightarrow \dot{\rho} = a_0 t \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta = \omega t$$

2.b Quelle est la trajectoire suivie par la mouche ? Donner son expression $\rho(\theta)$.

$$t = \frac{\theta}{\omega} \Rightarrow \rho(\theta) = \frac{1}{2} a_0 \frac{\theta^2}{\omega^2}$$

2.c Déterminer la vitesse de la mouche, en projection dans la base $(\hat{e}_\rho,\ \hat{e}_\theta,\ \hat{e}_z)$ liée aux coordonnées cylindriques $(\rho,\ \theta,\ z)$.

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta = a_0 t\,\hat{e}_\rho + \frac{1}{2} a_0 t^2 \omega\,\hat{e}_\theta$$

2.d Déduire l'expression du vecteur tangent $\hat{T}$ à la trajectoire puis celle du vecteur $\hat{N}$, tel que $(\hat{T}, \hat{N}) = \frac{\pi}{2}$ (base de Frénet).

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{(a_0 t)^2 + \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 \omega\right)^2} = a_0 t \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2}$$

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2}} \left(\hat{e}_\rho + \frac{1}{2}\omega t\,\hat{e}_\theta\right) \qquad \hat{N} \perp \hat{T} \Rightarrow \hat{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2}} \left(\frac{1}{2}\omega t\,\hat{e}_\rho - \hat{e}_\theta\right)$$

$$(\vec{T}, \vec{N}) = +\frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{T} \wedge \hat{N} = \hat{e}_z \Rightarrow \hat{N} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2}} \left(\frac{1}{2}\omega t\,\hat{e}_\rho - \hat{e}_\theta\right)$$

2.e Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire, en fonction du temps.

$$a_N = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{a_N}$$

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N}$$

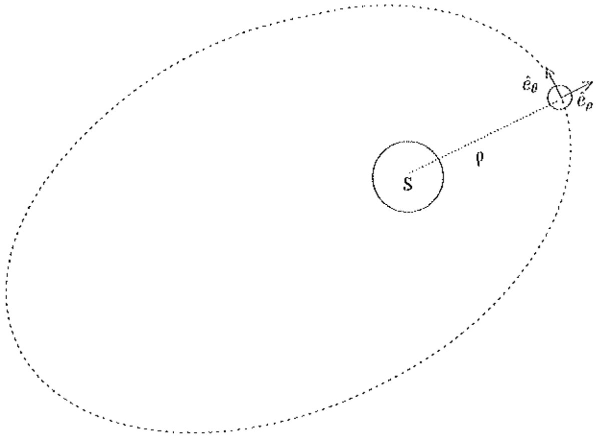
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_0 \hat{e}_\rho + a_0 t\omega\,\hat{e}_\theta + a_0 t\omega\,\hat{e}_\theta - \frac{1}{2} a_0 t^2 \omega^2 \hat{e}_\rho$$

$$= a_0\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2\right)\hat{e}_\rho + 2a_0\omega t\,\hat{e}_\theta$$

$$a_N = \frac{-a_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2}} \left[\frac{1}{2}\omega t\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) - 2\omega t\right] = \frac{\frac{a_0 \omega t}{4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2}} \left(6 + \omega^2 t^2\right)$$

$$R_c = \frac{(a_0 t)^2 \left(1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{a_0 \omega t}{4}\left(6 + \omega^2 t^2\right)} = \frac{4 a_0 t \left[1 + \left(\frac{1}{2}\omega t\right)^2\right]^{3/2}}{\omega\ \left(6 + \omega^2 t^2\right)}$$

3. La terre tourne autour du soleil avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Soit ρ la distance soleil-terre.



3.a En supposant que la norme du moment cinétique L_S de la terre par rapport à un axe passant par S ne peut dépendre que de de la masse de la terre m_T, de la distance ρ et de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, déterminer l'expression littérale de L_S, à une constante près, par l'analyse dimensionnelle.

$$[L_S] = M L^2 T^{-1}$$

$$L_S \propto m_T^\alpha \rho^\beta \dot{\theta}^\gamma$$

$$[L_S] = [m_T]^\alpha [\rho]^\beta [\dot{\theta}]^\gamma = M^\alpha L^\beta T^{-\gamma}$$

Donc $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ $\qquad L_S \propto m_T \rho^2 \dot{\theta}$

3.b Sachant que le mouvement a lieu dans le plan (ρ, θ), calculer le moment cinétique $\vec{L}_S$ dans la base $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z)$.

$$\vec{L}_S = \vec{ST} \wedge (m_T \vec{v}_T) = \rho \hat{e}_\rho \wedge \left[m_T (\dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{e}_\theta) \right] =$$

$$= m_T \rho^2 \dot{\theta} (\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\theta) =$$

$$= m_T \rho^2 \dot{\theta} \hat{e}_z$$

3.c Enoncer le théorème du moment cinétique. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_S}{\mathrm{d}t}$.

Soit O un point fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

Dans le système soleil-terre :

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{M}_S \qquad \vec{M}_S = \vec{ST} \wedge \vec{F}_{S \to T} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{ST} \,//\, \vec{F}_{S \to T}$$

Donc $\dfrac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{0}$