Université de Nice – Sophia Antipolis

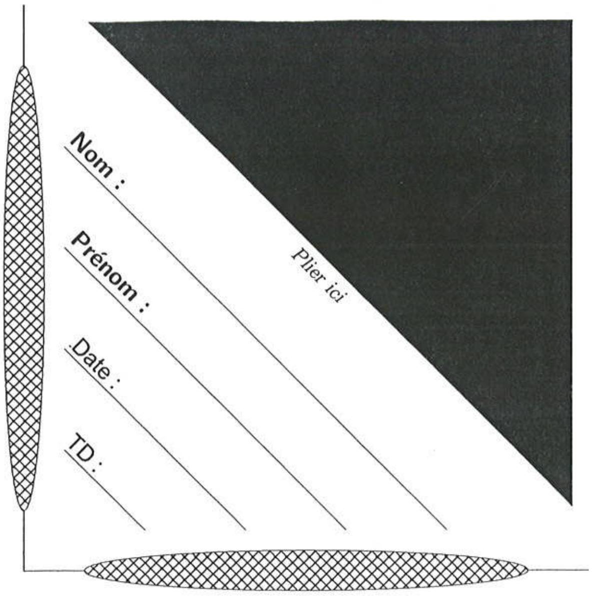
Polytech'Nice – CiP1
Contrôle de Mécanique

15 Décembre 2011 – Durée : 1h30

Note : CORRECTION

Cette feuille doit être cachetée par vos soins. Afin de faciliter le décachetage, n'opérez de fixation qu'à l'intérieur des ellipses hachurées

Documents non autorisés.



1. *Coordonnées cartesiennes et base de Frénet.*
Un mobile se deplace dans le plan $\{xOy\}$ suivant la loi horaire

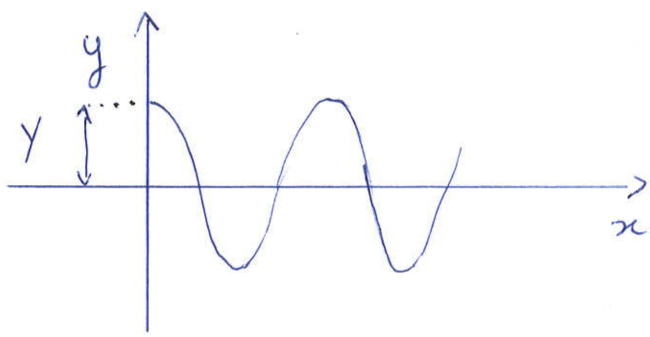
$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = Y\cos(\omega t) \end{cases}.$$

1.a Quelle est la trajectoire suivie par le mobile ? Donner son expression $y(x)$ et faire un schéma.

$t = \frac{x}{v_0}$

$y(x) = Y\cos\left(\frac{\omega x}{v_0}\right)$

La trajectoire est cosinusoidale



1.b Déterminer la vitesse du mobile, en projection dans la base $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ liée aux coordonnées cartesiennes (x, y, z).

$\vec{v} = v_0\,\hat{e}_x - Y\omega\sin(\omega t)\,\hat{e}_y$

1.c Déterminer l'accéleration du mobile.

$\vec{a} = -Y\omega^2\cos(\omega t)\,\hat{e}_y$

1.d Déduire l'expression du vecteur tangent $\hat{T}$ à la trajectoire puis celle du vecteur $\hat{N}$, tel que $(\hat{T}, \hat{N}) = \frac{\pi}{2}$ (base de Frénet).

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + Y^2\omega^2 \sin^2(\omega t)}} \cdot \left(v_0 \hat{e}_x - Y\omega \sin(\omega t)\, \hat{e}_y \right)$$

$$\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{v_0^2 + Y^2\omega^2 \sin^2(\omega t)}} \left(Y\omega \sin(\omega t)\, \hat{e}_x + v_0 \hat{e}_y \right)$$

1.e Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire, en fonction du temps.

$$R_c = \frac{v^2}{a_N} \qquad \text{avec} \quad v^2 = v_0^2 + Y^2\omega^2 \sin^2(\omega t)$$

$$\text{et} \quad a_N = \vec{a} \cdot \hat{N} = \frac{-Y\omega^2 v_0 \cos(\omega t)}{\sqrt{v_0^2 + Y^2\omega^2 \sin^2(\omega t)}}$$

$$\text{Donc} \quad R_c = -\frac{\left[v_0^2 + Y^2\omega^2 \sin^2(\omega t) \right]^{3/2}}{Y\omega^2 v_0 \cos(\omega t)}$$

2. *Coordonnées cylindriques.*

Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz . Ses équations horaires sont : $x = a\cos\theta\,;\ y = a\sin\theta\,;\ z = h\theta$. a est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ est l'angle que fait avec Ox la projection OM' de OM sur Oxy.

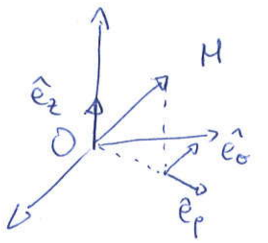
2.a Donner en coordonnées cylindriques les expressions de la vitesse et de l'accélération.

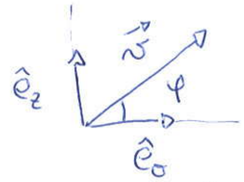
$$\vec{OM} = a\,\hat{e}_\rho + h\theta\,\hat{e}_z$$

$$\dot{\vec{OM}} = a\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + h\dot{\theta}\,\hat{e}_z$$

$$\ddot{\vec{OM}} = -a\dot{\theta}^2\,\hat{e}_\rho + a\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + h\ddot{\theta}\,\hat{e}_z$$

2.b Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant.





$$\tan\varphi = \frac{v_z}{v_\theta} = \frac{h\dot{\theta}}{a\dot{\theta}} = \frac{h}{a} = \text{constant}$$

2.c Montrer que si le mouvement de rotation est uniforme, le vecteur accélération est parallèle au plan Oxy.

mouvement de rotation uniforme : $\dot{\theta} = \text{const.}$

$$\ddot{\vec{OM}} = -a\dot{\theta}^2\hat{e}_\rho$$

$\hat{e}_\rho$ est // au plan Oxy $\Rightarrow$ $\ddot{\vec{OM}}$ est // au plan Oxy

3. *Virage.*

Un avion engage un virage de rayon $R = 400$ m à vitesse v_0 uniforme. Déterminez la vitesse v_0 maximale d'entrée dans le virage sachant que l'accélération ne doit pas dépasser $a = 10g$ ($g = 10$ ms^{-2}).

$\|\vec{v}\|$ constant $\Rightarrow a_T = 0$

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = a_N$$

$$a_N = \frac{v_0^2}{R} \qquad v_{0,MAX} = \sqrt{a_{MAX}\cdot R} = \sqrt{100\cdot 400} = 200 \text{ m/s}$$

4. *Loi horaire.*

Un mobile décrit la partie positive de l'axe (Ox) avec une vitesse de la valeur $v(t)$. La loi de vitesse $v(t)$ est liée à l' équation horaire $x(t)$ par la relation $x = av^2$, avec a une constante positive.

Le point matériel quitte l'origine O de l'axe à l'instant $t = 0$. Déterminer la loi horaire $x(t)$ sachant que $x(t)$ est une fonction croissante du temps.

$t \geq 0 \qquad x(t) \geq 0$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{t}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{x} + C$$ avec $C = 0$ car at $t=0$ $x(t=0) = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2}{4a}$$

5. *Analyse dimensionnelle et gravitation.*
Un satellite gravitant autour d'une planète de masse M, à la distance r a une période de révolution T. Par analyse dimensionnelle, retrouver la troisième loi de Kepler :

$$GMT^2 = kr^3,$$

où G est la constante de la gravitation universelle.

$$\|\vec{F}_G\| = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow [G] = \frac{[F][r^2]}{M^2} =$$

$$= \frac{M L T^{-2} \cdot L^2}{M^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

3ème loi de kepler : $GMT^2 = kr^3$

$$[GMT^2] = [kr^3]$$

$$L^3 M^{-1} T^{-2} \cdot M \cdot T^2 = L^3$$ k constante adimensionelle