Université de Nice – Sophia Antipolis

Polytech'Nice – CiP1
Contrôle de Mécanique

7 Décembre 2009 – Durée : 1h30

Note : CORRECTION

Nom :

Prénom :

Date :

TD :

Plier ici

Cette feuille doit être cachetée par vos soins. Afin de faciliter le décachetage, n'opérez de fixation qu'à l'intérieur des ellipses hachurées

Documents non autorisés.

1. *Analyse dimensionnelle*
Un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m, suspendu à un fil inextensible de longueur l. On note g l'accélération de la pesanteur. Déterminer par l'analyse dimensionnelle la fréquence ν.

fréquence = nombre d'oscillations par unité de temps

$[\nu] = T^{-1}$. On cherche $\nu = C\, m^{\alpha} g^{\beta} l^{\gamma}$

$[\nu] = [m^{\alpha} g^{\beta} l^{\gamma}] \Rightarrow T^{-1} = M^{\alpha} L^{\beta} T^{-2\beta} L^{\gamma}$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \nu = C\sqrt{\frac{g}{l}}$$

2. *Spirale logarithmique*
Un point M, repéré par ses cordonnées polaires ρ, θ telles que $\vec{OM} = \rho\vec{u}_\rho$ et $(\vec{u}_x, \vec{u}_\rho) = \theta$ parcourt une spirale logarithmique d'équation polaire $\rho = \rho_0 e^{\theta}$. La vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ reste constante le long de la trajectoire.

2.(a) Exprimer la vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = \rho_0\dot{\theta}e^{\theta}\,\vec{u}_\rho + \rho_0\dot{\theta}e^{\theta}\,\vec{u}_\theta =$$
$$= \rho_0\,\omega\, e^{\omega t}(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta) \quad \text{car } \dot{\theta} = \omega \text{ et donc } \theta = \omega t$$

2.(b) Exprimer la ~~vitesse~~ accélération $\vec{a}$ du point M en coordonnées polaires
Rappel : en coordonnées cylindriques $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$.

$\dot{\rho} = \omega\rho$ et $\ddot{\rho} = \frac{d}{dt}\dot{\rho} = \omega^2\rho$ $\dot{\theta} = \omega$ $\ddot{\theta} = 0$ $\dot{z} = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\rho\omega^2 - \rho\omega^2)\vec{u}_\rho + (2\rho\omega^2)\vec{u}_\theta =$$
$$= 2\rho_0 e^{\omega t}\omega^2 \vec{u}_\theta$$

2.(c) Calculer la composante tangentielle et la composante normale de l'accélération à chaque instant t.

$$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)$$

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \sqrt{2}\rho_0 e^{\omega t}\omega^2$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{4\rho_0^2 e^{2\omega t}\omega^4 - 2\rho_0^2 e^{2\omega t}\omega^4} = \sqrt{2}\rho_0 e^{\omega t}\omega^2$$

$\vec{N} \perp \vec{T}$ et tel que $(\vec{T}, \vec{N}) = +\frac{\pi}{2}$

Les deux vecteurs unitaires orthogonaux à $\vec{T}$ sont $\vec{N}_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u}_\rho - \vec{u}_\theta)$

Pour que $(\vec{T}, \vec{N}) = +\frac{\pi}{2}$, il faut choisir $\vec{N}$.

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)$$

2.(d) Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire en fonction du temps.

$a_N = \frac{v^2}{R_c}$ donc $R_c = \frac{v^2}{a_N} = \frac{2\rho_0^2\omega^2 e^{2\omega t}}{\sqrt{2}\rho_0\omega^2 e^{\omega t}} = \sqrt{2}\rho_0\omega e^{\omega t}$

$$\Rightarrow R_c = \sqrt{2}\rho_0 e^{\omega t}$$

3. *Mouvement rectiligne*

Une auto attend à un feu rouge. Quand le feu passe au vert, l'auto accélère uniformément pendant 6 s avec une accélération de 2 $\mathrm{m\,s^{-2}}$, après quoi elle se déplace avec une vitesse uniforme. Au moment où la voiture démarre au feu vert, un camion se déplaçant dans la même direction, avec une vitesse uniforme de 10 $\mathrm{m\,s^{-1}}$, la dépasse. Au bout de combien de temps, et à quelle distance du feu, l'auto et le camion se rattraperont-ils ?

voiture

$t \leq 6 \quad a_{v,1} = 2\,m\,s^{-2} \quad v_1 = at \quad x_{v,1}(t) = \frac{a}{2} t^2$

$t > 6 \quad a_{v,2} = 0 \quad v_2 = 2 \cdot 6 = 12\ m/s \quad x_{v,2}(t) = 36 + v_2 (t-6)$

camion

$\forall t \quad a_c = 0 \quad v_c = 10\ m/s \quad x_c(t) = v_c \cdot t$

À $t=6$ la voiture a parcouru 36 m et le camion 60 m. Donc ils se rencontrent après les premiers 6 seconde, quand la voiture se deplace de mouvement rectiligne uniforme.

$x_{v,2} = x_c \Rightarrow 36 + 12(t-6) = 10t \Rightarrow 2t = 36$

$\Rightarrow t = 18\ sec.$

$x_c(18\,s) = 10 \cdot 18 = 180\ m$

4. *Mouvement circulaire*

Un point se deplace sur un cercle de rayon R avec une accélération angulaire $\ddot{\theta} = \alpha$ constante.

4.(a) Ecrire la vitesse et l'accélération du point en coordonnées polaires $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta\}$ en posant $v(t=0) = 0$.

$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ or $\ddot{\theta} = \alpha$ donc $\dot{\theta} = \alpha t + \text{cost}$.

$= R\alpha t\,\vec{u}_\theta$ $\quad \text{cost} = 0$ car $v(0) = 0$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta = -R\alpha^2 t^2\,\vec{u}_\rho + R\alpha\,\vec{u}_\theta$

4.(b) Déduire la norme du vecteur accélération, ainsi que sa direction par rapport au vecteur de base $\vec{u}_\rho$.

$\|\vec{a}\| = \sqrt{(R\alpha^2 t^2)^2 + (R\alpha)^2} = R|\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$

$\vec{u}_\rho \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{\vec{u}_\rho \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{-R\alpha^2 t^2}{R|\alpha|\sqrt{1+\alpha^2 t^4}}$

$\phi = \pm \arccos\left(\frac{-|\alpha| t^2}{\sqrt{1+\alpha^2 t^4}}\right)$

4.(c) Ecrire la vitesse et l'accélération du point sur la base de Frénet.

$\vec{T} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{u}_\theta \qquad \vec{N} = -\vec{u}_\rho$

$\vec{v} = R\alpha t\ \vec{T}$

$\vec{a} = R\alpha\ \vec{T} + R\alpha^2 t^2\ \vec{N}$

4.(d) Ecrire l'abscisse curviligne $s(t)$ sur le cercle, en posant $s(t=0)=0$.

$v = \frac{ds}{dt} = R\alpha t \qquad$ donc $\displaystyle\int_{s(t=0)}^{s(t)} ds = \int_{t=0}^{t} \alpha t\, dt$

$s(t) = \frac{1}{2} R\alpha t^2$

4.(e) Calculer le temps employé par le point pour faire un tour du cercle. ($A.N.$: $\alpha = \pi\,\mathrm{s}^{-2}$.)

un tour $\Rightarrow$ $s(t_t) = 2\pi R$

$\frac{1}{2} R\alpha t_t^2 = 2\pi R$

$t_t^2 = \frac{4\pi}{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad t_t = 2$ sec.

5. *Trajectoire d'un mobile*

Un mobile se déplace à une vitesse de norme constante $\|\vec{v}\| = 3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. La direction de la vitesse fait un angle $\theta(t) = \frac{\pi}{2}t$ *rad* (t est le temps) avec l'axe Ox positif. Si $x=y=0$ quand $t=0$, trouver l'équation de la trajectoire du mobile.

$v_x = \frac{dx}{dt} = \|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \Rightarrow x = \frac{2}{\pi}\|\vec{v}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_1$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \|\vec{v}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \Rightarrow y = -\frac{2}{\pi}\|\vec{v}\| \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2$

$x(0) = y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ et $C_2 = +\frac{2}{\pi}\|\vec{v}\|$

$$\begin{cases} x = \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ y - \frac{6}{\pi} = -\frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{6}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{6}{\pi}\right)^2$$

cercle de rayon $\frac{6}{\pi}$ m et de centre $\left(0, \frac{6}{\pi}\right)$